

磁極に対するクーロンの法則と電流がつくる磁場の法則から 電磁力の式 $F = \mu_0 I H l$ を導く

石川昌司
立命館慶祥高等学校

あらまし 磁極に対するクーロンの法則と電流がつくる磁場の法則から電磁力の式 $F = \mu_0 I H l$ を理論的に導く試みについて報告する。また、このとき、磁極が受ける力と電流が受ける力の作用線が重ならない問題に関して、科学史の見地からの考察を述べる。

キーワード 磁極に対するクーロンの法則, 電流が磁場から受ける力, フレミングの左手の法則

1. はじめに

現行の高校教科書では、電流導線が磁場から受ける力—フレミングの左手の法則として一括されることも多い、以下本稿では電磁力と呼ぶ—の導入を、実験の写真や図を示した上で、“実験によると電流導線には磁場からこのような向きの力がはたらくことがわかる。その力の大きさは $F = \mu_0 I H l$ である。”と説明している¹⁾。筆者も長らくこの流れに沿って授業を行ってきた。この説明を、仮に $F = \mu_0 I H l$ を実験式として見る立場としよう。しかし、この方法では、 F が、何故、 I や H に比例するのか、また力 F の向きが、何故、 I や H の向きに垂直なのかなどという学習者の素朴な疑問に対して、“実験した結果がそうだから”として、それ以上の疑問を差し挟むことを許さないようにも見える。さらに実験式として見る立場ならば、実験式とは実験精度に依存する近似式であるはずだから、誤差はどこまで許されるのかなどといった別の疑問も沸き起こってくる^a。

そこで、筆者は、 $F = \mu_0 I H l$ を、高校物理の学

習内容として無理のない範囲で、理論式として導けないか試みたところ、ある程度可能であることがわかったので、その方法について報告する。

なお、導出にあたっては、以下の項目を学習者の既習事項とした¹⁾。

- ・磁極に対するクーロンの法則

$$F = k_m \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad k_m = \frac{10^7}{(4\pi)^2} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{Wb}^2 \quad \textcircled{1}$$

- ・磁場 \vec{H} の定義

$$\vec{F} = m\vec{H} \quad \textcircled{2}$$

- ・直線電流がつくる磁場の大きさ

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \textcircled{3}$$

- ・円形電流が円の中心につくる磁場の大きさ

$$H = \frac{I}{2r} \quad \textcircled{4}$$

^a 教科書のずっと先では、運動する荷電粒子が磁場から受ける力いわゆるローレンツ力が登場し、電磁力とはつまるところ自由電子にはたらくローレンツ力の和であるとの説明がなされる。これはこれであるほどとも思うが、しかし、何故ローレンツ力は $\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ なのかが説明されないと本質的に先の疑問に答えたことにはならない。筆者の考えでは、結局のところ $\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ またはこの式と等価であろう $\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} l$ は実験式ではなく、逆にこの式で \mathbf{B} が定義されていて、真空

中では $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ だから、したがって $\mathbf{F} = \mu_0 \mathbf{I} \times \mathbf{H} l$ で

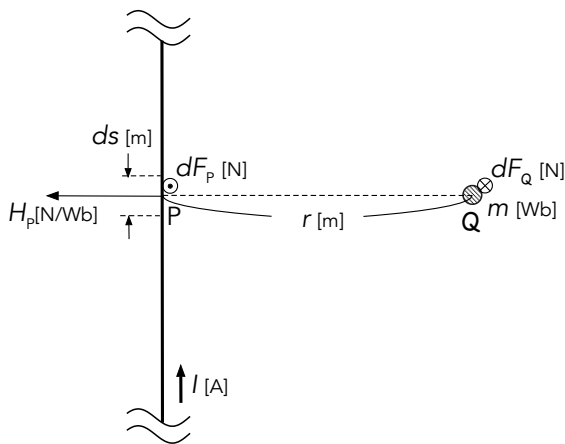
\mathbf{H} は定義される、と説明するのが一番すっきりするように思う。しかし、この定義は、高校生が磁気の最初に学ぶ原理としては難しすぎるし、教科書の記述もそのようになっていない。そこで、本稿では、磁極に対するクーロンの法則で磁極の強さ m を定義し、次に $\mathbf{F} = m\mathbf{H}$ で \mathbf{H} を定義し、また、電流がつくる磁場の法則は既知であるとした上で、 $\mathbf{F} = \mu_0 \mathbf{I} \times \mathbf{H} l$ を証明する立場を取る。

また、真空の透磁率 μ_0 は教科書では電磁力の後に登場する物理量であるが、式の表現を簡潔にするため、本稿ではこれを含めたものを最終的な式形とした。

2. ビオ・サバルの法則を使う方法

上に書いた前提と矛盾しているようで恐縮だが、読者諸氏の中には、ビオ・サバルの法則の一部を生徒に話題提供されている方もいらっしゃるのではないだろうか。その場合は、後で述べる第2の方法よりもやや一般的な導出が出来る。

電流導線の途中の任意の位置に点Pをとる。点Pを含む電流素片を Ids とおく。点Pから Ids の向きと垂直に距離 r [m]離れた点Qに m [Wb]の磁極が置かれているとする。（図1）



【図1】電流素片と磁極の間の相互作用

電流素片 Ids が点Qにつくる微小磁場を $\overrightarrow{dH_Q}$ 、その大きさを dH_Q とおくと、ビオ・サバルの法則により、

$$dH_Q = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Ids}{r^2}$$

である。したがって、点Qに置かれた磁極 m がこの磁場から受ける微小な力を $\overrightarrow{dF_Q}$ 、その大きさを dF_Q とおくと、(2)より、

$$dF_Q = m \cdot dH_Q = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{m \cdot Ids}{r^2}$$

となる。

次に、点Qに置かれた磁極 m が点Pにつくる磁

場を $\overrightarrow{H_P}$ 、その大きさを H_P とおく。(1),(2)より、

$$H_P = k_m \frac{m}{r^2}$$

一方、電流素片 Ids にはたらく微小な力を $\overrightarrow{dF_P}$ 、その大きさを dF_P とおく。 $\overrightarrow{dF_P}$ と $\overrightarrow{dF_Q}$ の間には作用反作用の法則が成り立つと考えると $\overrightarrow{dF_P} + \overrightarrow{dF_Q} = \vec{0}$ 。すなわち $dF_P = dF_Q$ 。したがって、

$$dF_P = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{m \cdot Ids}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{H_P}{k_m} Ids = \frac{1}{4\pi k_m} H_P Ids$$

dF_P は、 I, H_P, ds に比例している。そこで、注目している導線の長さを ds のかわりに l と書き、また dF_P, H_P を単に F, H と書くと、次の式になる。

$$F = \frac{1}{4\pi k_m} I H l$$

最後に $\mu_0 = \frac{1}{4\pi k_m} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(4\pi)^2}{10^7} = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ とおけば

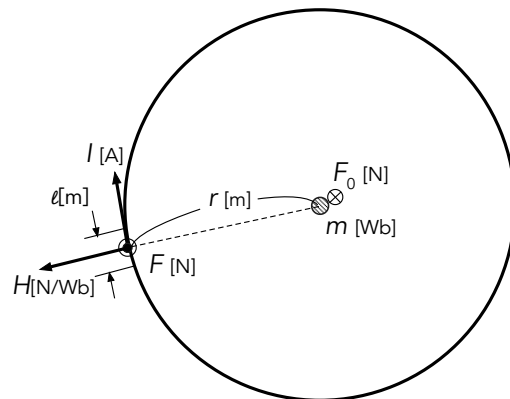
$$F = \mu_0 I H l$$

を得る。以上、導出終わり。

3. ビオ・サバルの法則を使わない方法

ビオ・サバルの法則は、高校の学習指導要領の範囲を超えるので、これを用いて証明するのは本来反則技である。そこで、ビオ・サバルの法則を用いない第2の導出を示そうと思う。

半径 r [m]の円形一巻きの導線に大きさ I [A]の電流を流す。（図2）



【図2】円形電流と円の中心に置かれた磁極の相互作用

円の中心における磁場を \vec{H}_0 、その大きさを H_0 とおく。(4)より、

$$H_0 = \frac{I}{2r}$$

ここに m [Wb]の磁極をおくときこの磁極にはたらく力を \vec{F}_0 、その大きさを F_0 とおく。(2)より、

$$F_0 = m \cdot H_0 = \frac{m \cdot I}{2r}$$

次に、点Oに置いた磁極が導線の場所につくる磁場を \vec{H} 、その大きさを H [N/Wb]とおく。(1)、(2)より、

$$H = k_m \frac{m}{r^2}$$

磁極にはたらく力と円形電流導線の全体にはたらく力の間には作用反作用の法則が成り立つと考える。今、導線の長さ l [m]あたりにはたらく力を \vec{F} 、その大きさを F とおく。すると、上に述べた作用反作用の法則により、 $\vec{F} \cdot \frac{2\pi r}{l} + \vec{F}_0 = \vec{0}$ す

なわち $F = \frac{l}{2\pi r} F_0$ 。したがって、

$$F = \frac{l}{2\pi r} \cdot \frac{m \cdot I}{2r} = \frac{l}{4\pi} \cdot \frac{H}{k_m} \cdot I = \frac{1}{4\pi k_m} I H l$$

ここで $\mu_0 = \frac{1}{4\pi k_m} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(4\pi)^2}{10^7} = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ とおけば

$$F = \mu_0 I H l$$

を得る。以上、導出終わり。

4. 電流と磁場の相互作用をどう教えるか

上に書いた2つの導出は、どちらも、電流導線と磁極の間にはたらく力が作用反作用の法則を満たすことを前提としている。しかし、作用と反作用であれば作用線が重ならなければならないのに、本導出ではそうになっていない。この点を疑問に思う生徒もいるだろう。この矛盾の原因は

どこにあるのだろうか。また最初の問いに戻るが、電磁力の式 $F = \mu_0 I H l$ はそもそも実験結果をまとめたものなのか、それとも理論的に導かれたものなのだろうか。これらの問いに対する答は、科学史の中から見出すことができるだろう。

電流がつくる磁気作用は、デンマークのエルステッドにより、1819年の冬から1820年の春までの間に発見されたとされている。その発見が記された論文が印刷され公表されたのが1820年7月27日であった。フランスのアンペールがその報を伝え聞いたのが9月11日、アンペールはそれから1週間後の9月18日には早くもフランスの学士院で自らの研究の第1報を報告している。さらに続けて10月2日、10月9日、11月6日には科学アカデミーで報告している。一方、当時コレージュ・ド・フランスの物理学教授であったビオとサバルは、協力してこの不思議な現象を研究し、10月30日の科学アカデミーでその研究成果を報告したという。また、同じ頃、ドイツのゼーベックは、直線電流の周りに鉄粉をまくと、鉄粉が同心円状に並ぶだろうと予言し、その後のファラデーに大きな影響を与えたと小林は語っている²⁾。

エルステッド以前にも、磁気と電気の間には何か関係があるのではないかと考えた人たちはいたようだが、それらの人たちはみな、電荷（＝静電気）と磁極（＝磁石）の間の相互作用を調べていた。しかし、電荷と磁極の間にはたらく力はいかに発見されなかった。

エルステッドは、電池と導線で作った電気回路のそばに磁針を置いて、この回路が開いている場合は磁針は全く振れず、回路が閉じたときだけ磁針が著しく反応を示すことを見出した。つまり、磁気と相互作用するのは、電荷ではなく電流だったのである。エルステッド以外の誰も成功しなかった理由はここにある。さらにエルステッドを驚かせたことは、はたらく力の向きが、電流導線と磁極を結ぶ直線上の引力や斥力ではなく、また、流れる電流の向き——あるいは流れる電流と逆向き——でもなかったことである。「最初かれは磁針と直角に針金を置いたがなんの効果も得られなかった。講義ではこの否定的結果が示されたが、講義終了後針金を磁針と平行に置こうというア

アイデアが浮かんだ。それを試みると磁針の著しいふれが観測され、磁気と電流の関係が発見された³⁾。」

1820年は、電磁気学史的には奇跡の年であった。この年の暮れまでには、電流と磁気間の相互作用の法則があらかた明らかになった^{b)}。ちなみに、翌1921年には、電磁力の応用として、ファラデーが、あの有名な単極モーターの原理を考案している⁴⁾。

しかし、アンペールは1822年以降もこの問題にこだわり続けた。なぜなら、アンペールにとって、エルステッドが発見した力の向きの法則は、最終的な物理の基本法則と思えなかったからである。アンペールは、研究を継続するにあたって、次の事実から出発した。平行に張った2本の電流導線の間には、電流が同じ向きに流れるときは引き合い、反対に流れるときは反発する力がはたらく。これは、導線を結ぶ直線の方向にはたらく引力と斥力の関係になっていて、ニュートンの万有引力の法則と同様、作用と反作用の法則を満たしている。アンペールは二つのソレノイドの間の相互作用を調べ、磁石と磁石間の相互作用は電流と電流間の相互作用に還元できると確信した。ということは、電流と磁石間の相互作用の問題も、電流と電流間の相互作用の問題に帰着できるということである。アンペールによる理論の詳細は、1827年の「実験から一意的に導かれた電気力学的現象の数学的理論について」という論文にまとめられることになった⁵⁾。

さて、本稿の本来のテーマに戻ろう。磁極と電流間の作用と反作用が一直線上の引力や斥力にならず、作用線が互いに平行にずれてしまう理由は何なのか。電磁力の発見の歴史を概観してわかったことは、1つ目として、磁極と電流間の相互作用は、電流と電流間の相互作用に還元で

きるという事実である。さらに2つ目として、電流と電流間の相互作用では作用と反作用の作用線は重なるという事実である。これら二つの経験事実を踏まえて先の疑問に立ち返ってみると、磁極と電流間の相互作用の作用線が重ならないように見える理由は、現実世界には存在しない磁極の概念を理論の中で仮定したからに他ならないとわかる。つまり、磁極のかわりに同じ場所に同じ磁気作用をもつ小さな電流閉回路を置くことによってこの矛盾は解消するということがある。前述の質問をしに来た生徒には、よく気がついたねと大いに褒めた上で、上のように答えてみてはどうだろうか。

最後に本稿の初出について述べる。1～3章の本文及び図1、図2は先行論文（引用文献7）に若干の修正を加えたものである。また、4章と脚注a, bはその後新たに書き加えたものである。

引用文献

- 1) 例えば、国友正和、他9名：改訂版 物理，数研出版，2017年検定済高校教科書 など
- 2) 小林一夫：学生と教師のための電磁気学史（2022.6.16閲覧）<http://www.ed.niigata-u.ac.jp/~itoh/EMhistoryv5.pdf> pp. 82-86
- 3) E. T. ホイッターカー：エーテルと電気の歴史，霜田光一，近藤都登訳，1976，講談社，p. 101
- 4) ウィキペディア 単極電動機（2022.6.16閲覧）<https://ja.wikipedia.org/wiki/単極電動機>
- 5) 小林一夫：学生と教師のための電磁気学史，pp. 87-88
- 6) ウィキペディア ジョン・フレミング（2022.6.16閲覧）<https://ja.wikipedia.org/wiki/ジョン・フレミング>
- 7) 石川昌司：電流が磁場から受ける力の式 $F = \mu_0 I H l$ のあやしげな導出について，北海道の理科 No. 64（2021）

これがフレミングの法則の始まりである⁶⁾。この覚え方は、それ以降世界中に広まり有名になった。しかし、電流と磁気間の相互作用に関する科学的知見の発見の歴史に関して、フレミングは全く無関係であると言っているだろう。

^{b)} 1884年頃、ロンドン大学で電磁気学を教えていたジョン・フレミングは、学生が、電流、磁気、力の向きの関係をなかなか憶えられないのを見て、これをイメージしやすいように手の指を使って覚える方法を考案し、これを学会に発表した。